Dio tablice izvoda

1) $(c)' = 0;$

2) $(u+v-w)' = u' + v' - w';$

3) $(uv)' = u'v + v'u;$

3a) $(cu)' = cu';$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$

4a) $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c};$

4б) $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2};$

5) $(x^n)' = nx^{n-1};$

6) $(\sin x)' = \cos x;$

7) $(\cos x)' = -\sin x;$

8) $(\mathrm{tg}\, x)' = \sec^2 x;$

9) $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\mathrm{cosec}^2 x.$

5) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u';$

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

8) $(\mathrm{tg}\, u)' = \sec^2 u \cdot u';$

9) $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\mathrm{cosec}^2 u \cdot u'.$

10) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$

11) $(\log u)' = \frac{u'}{u} \log e;$

10a) $(e^u)' = e^u u';$

11a) $(\ln u)' = \frac{u'}{u};$

10б) $(a^x)' = a^x \ln a;$

11б) $(\log x)' = \frac{1}{x} \log e;$

10в) $(e^x)' = e^x;$

11в) $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

12) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$

12a) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

13) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$

13a) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

14) $(\mathrm{arc\,tg}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2};$

14a) $(\mathrm{arc\,tg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2};$

15) $(\mathrm{arc\,ctg}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2};$

15a) $(\mathrm{arc\,ctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Dio tablice integrala

1. $\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \ \ a \neq -1.$

2. $\int u^{-1}\,du = \int \frac{du}{u} = \int \frac{u'}{u}\,dx =$
$= \ln|u| + C.$

3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \ \int e^u\,du =$
$= e^u + C.$

4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C.$

5. $\int \cos u\,du = \sin u + C.$

6. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C.$

7. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{ctg} u + C.$

8. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C.$

9. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

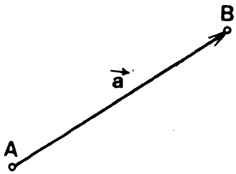
10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} =$
$= \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + C.$

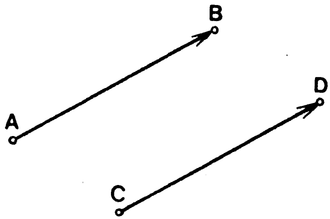
§ 1. Osnovni pojmovi vektorske algebre

1.1. Pojam vektora

Dužina $\overline{AB}$ kod koje su krajevi A i B uređeni, tj. jedna od točaka proglašena je za početak (hvatište), a druga za svršetak (kraj, šiljak) zove se *usmjerena dužina* ili *vektor*. Vektor kojemu je A početak a B kraj označujemo s $\overrightarrow{AB}$ i taj vektor skiciramo kao na pripadnoj sl.1. Vektore također označujemo i s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ itd. Udaljenost točaka A i B zovemo *duljina, norma* ili *modul* vektora $\overrightarrow{AB}$. Normu vektora $\overrightarrow{AB}$ označujemo s $|\overrightarrow{AB}|$, odnosno vektora $\vec{a}$ sa $|\vec{a}|$. Vektor modula 1 zovemo *jediničnim vektorom* i označujemo sa $\vec{a}^{\,0}$. Pravac AB zovemo *nosiocem* vektora $\overrightarrow{AB}$ i za taj vektor kažemo da ima *smjer* od A prema B. Za dva vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ kažemo da su *jednaki* i pišemo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ako postoji translacija prostora koja točku A prevodi u C i istovremeno točku B u D (vidi sl.2). Jasno je da jednaki vektori imaju jednake module i iste smjerove. Za dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kažemo da su *kolinearni* ako oni imaju isti nosilac.

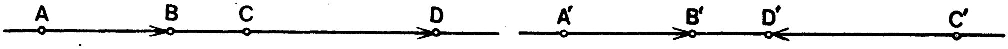


Sl. 1.



Sl. 2.

Na pripadnoj sl. 3. prikazani su kolinearni vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ i oni su istog



Sl. 3.

smjera. Vektori $\overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{C'D'}$ su također kolinearni ali suprotnog smjera.

Kolinearnim vektorima smatramo također i vektore kojima su nosioci paralelni.

1.2. Množenje vektora realnim brojem. Zbrajanje vektora. Linearna kombinacija vektora.

a) Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ bilo koji vektor i $\lambda > 0$ bilo koji realni broj (skalar). Tada znamo da na pravcu AB postoji jedinstvena točka C takva da je

$$\lambda \overline{AB} = \overline{AC} \tag{1}$$

i da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ istog smjera (vidi sl.4). Tako dobiveni vektor $\vec{b}$ zovemo *produktom skalara* λ *i vektora* $\vec{a}$ i pišemo:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Sl. 4.

Na isti način za $\lambda < 0$ i bilo koji vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ postoji jedinstvena točka C na pravcu AB takva da vrijedi (1) i da su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ suprotnog smjera (sl. 5). Vektor $\vec{b}$ zovemo produktom skalara λ i vektora $\vec{a}$ i pišemo:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Sl. 5.

Specijalno vektor $\vec{a} = (-1)\,\vec{a}$ označujemo s $-\vec{a}$ i zovemo suprotnim od $\vec{a}$.

Napokon za $\lambda = 0$ i svaki vektor $\vec{a}$ stavljamo $0\,\vec{a} = \vec{0}$, gdje smo s $\vec{0}$ označili *nul-vektor*. To je vektor kojemu početak i kraj padaju u istu točku. Uzima se da je nul-vektor kolinearan sa svakim vektorom.

Množenje vektora skalarom je asocijativno s obzirom na skalarni faktor, tj. vrijedi uvijek:

$$\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu)\vec{a}.$$

Jediničnim vektorom u smjeru vektora $\vec{a}$ zovemo vektor

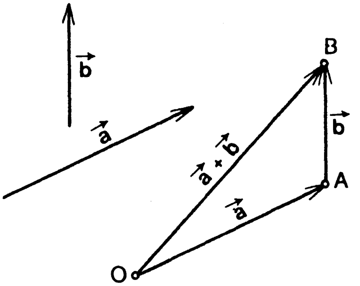
$$\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a}.$$

b) *Operacija zbrajanja vektora* uvodi se ovako:

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bilo koja dva vektora. Uzmimo u prostoru bilo koju točku O i translatirajmo vektor $\vec{a}$ tako da mu početak padne u O, a vektor $\vec{b}$ tako da mu početak padne u kraj A translatiranog vektora $\vec{a}$.

Označimo s B kraj translatiranog vektora $\vec{b}$. Vektor $\vec{c}=\overrightarrow{OB}$ zovemo tada *zbrojem vektora* $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i pišemo (sl. 6):

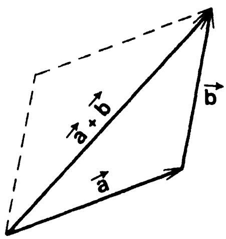
$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}.$$



Sl. 6.

Zbroj $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ možemo shvatiti i kao »prvu« dijagonalu paralelograma kojeg određuju na prije opisani način translatirani vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tako definirano zbrajanje vektora ima ova svojstva:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}), \text{ (asocijativnost)}$$
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a},$$
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}, \qquad \text{(komutativnost).}$$



Sl. 7.

Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definira se njihova *razlika:*

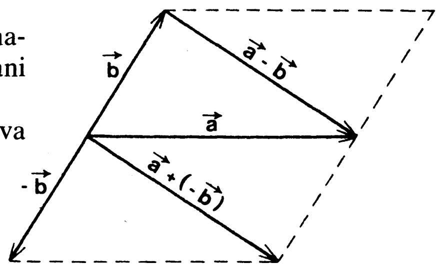
$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$$

ovako: $\quad \vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$

Razlika $\vec{a}-\vec{b}$ predočena je »drugom« dijagonalom paralelograma kojeg određuju translatirani vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (sl. 8).

Množenje vektora sa skalarima ima ova svojstva distributivnosti:

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},$$
$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}.$$



Sl. 8.

c) Za vektore $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ i skalare $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ potpuno je određen vektor

$$\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\dots+\lambda_n\vec{a}_n.$$

Vektor $\vec{b}$ zovemo *linearnom kombinacijom* ili *linearnim spojem* vektora $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$. Za vektore $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ kažemo da su *linearno zavisni* ako postoje skalari $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ od kojih je barem jedan različit od nule tako da vrijedi:

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}. \tag{2}$$

Vektori $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ su *linearno nezavisni* ako (2) povlači $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$.

Na primjer: Svaka četiri vektora u prostoru su linearno zavisna. Svaka tri vektora u ravnini su linearno zavisna.

1.3. Koordinate vektora

Neka je O bilo koja točka prostora. Tada svakoj toči T prostora možemo pridružiti vektor $\overrightarrow{OT}$. Taj vektor zovemo radijvektorom točke T. Neka su dalje $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ linearno nezavisni vektori s početkom u O, tada postoji i jedinstven je rastav:

$$\overrightarrow{OT} = t^1\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 + t^3\vec{e}_3. \tag{3}$$

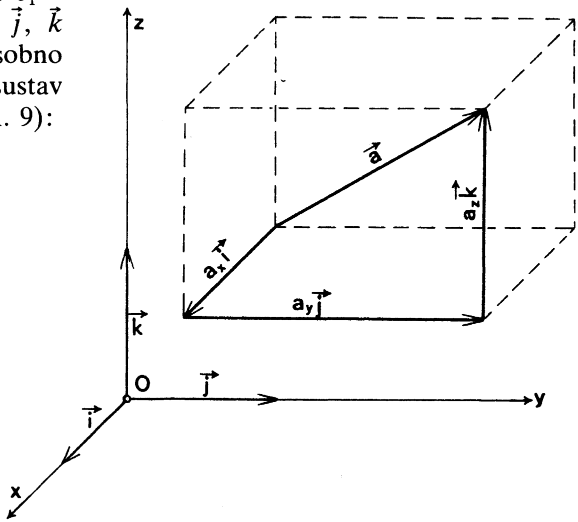
Skup $\{O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ zovemo *afinim ili kosokutnim koordinatnim sustavom u prostoru,* a uređenu trojku (t^1, t^2, t^3) *afinim ili kosokutnim koordinatama točke* T ili radijvektora $\overrightarrow{OT}$ ili bilo kojeg vektora koji je jednak vektoru $\overrightarrow{OT}$ u tom sustavu. To pišemo ovako $T=(t^1, t^2, t^3)$. Specijalni slučaj afinih koordinata jesu *Descartesove pravokutne koordinate.*

Njih dobivamo tako da uzmemo $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$, gdje su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori koji su međusobno ortogonalni i koji čine desni sustav vektora. Tada rastav (3) glasi (sl. 9):

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Ovo se još piše ovako:

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z), \text{ ili}$$
$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}.$$



Sl. 9.

Uređenu trojku (a_x, a_y, a_z) zovemo pravokutnim ili Descartesovim koordinatama vektora $\vec{a}$.

Do sada definirane operacije s vektorima u koordinatama izgledaju ovako: Neka su zadani vektori $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$. Tada je:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k},$$
$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}.$$

Ako su zadane točke $A = (x_1, y_1, z_1)$ i $B = (x_2, y_2, z_2)$ tada je vektor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

ili kraće:

$$\overrightarrow{AB}\ (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

1.4. Produkti vektora – produkt od dva vektora

a) *Skalarni produkt vektora* (ili unutarnji ili in produkt). Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (označuje se s $\vec{a} \cdot \vec{b}$) jest skalar, definiran jednadžbom:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos\phi,$$

gdje je ϕ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dovedenih u isti početak, i $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$.

b) *Svojstva skalarnog produkta*

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (zakon komutacije),

$\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b}$ (zakon asocijativnosti s obzirom na skalarni faktor α).

Uočite da ne vrijedi relacija:

$$\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Naime, na lijevoj strani vektor je kolinearan s $\vec{a}$ (oblika $\alpha\vec{a}$), a na desnoj strani vektor je kolinearan s $\vec{c}$ (oblika $\gamma\vec{c}$). Zato je nužno staviti zagradu, jer izraz oblika $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ nije određen, tj. ne znamo mu ni smjer ni smisao niti iznos. Dalje vrijedi:

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (zakon distribucije za skalarno
$(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ množenje prema zbrajanju),
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$.

Za $\vec{a} \cdot \vec{a}$ upotrebljava se kraća oznaka $\vec{a}^2$. Očito vrijedi:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

c) *Vektorski produkt vektora* (ili vanjski ili eks-produkt). Vektorski produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (označuje se s $\vec{a} \times \vec{b}$) jest vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, čiji je modul $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\phi$ (tj. čiji je modul jednak ploštini paralelograma nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao stranicama), nadalje čiji je pravac okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a smjer je određen zahtjevom da tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ čine desni sustav (tj. tako da je najkraća rotacija od $\vec{a}$ prema $\vec{b}$ za promatrača, koji promatra s kraja vektora $\vec{c}$ protivna rotaciji kazaljke na satu).

d) Svojstva vektorskog produkta

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (zakon antikomutativnosti; pri zamjeni faktora vektorski produkt mijenja smjer),

$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$ (zakon asocijativnosti s obzirom na skalarni faktor α),

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (zakon asocijativnosti za vektorsko množenje tri vektora ne vrijedi (vidi 1.5.d.). Naime, na lijevoj strani vektor je komplanaran s $\vec{b}$ i $\vec{c}$, a na desnoj vektor komplanaran s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, pa je stoga nužno staviti zagradu kod vektorsko-vektorskog produkta.

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (zakon distribucije vektorskog množenja
$(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$ prema zbrajanju)
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \,||\, \vec{b}$ (uvjet kolinearnosti, paralelnosti vektora).

Očito vrijedi:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \text{i} \quad \vec{0} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}.$$

1.5. Trostruki produkti vektora

a) *Vektorsko-skalarni produkt* (ili mješoviti produkt, ili eks-in produkt) triju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jest skalarni produkt vektorskog produkta $\vec{a} \times \vec{b}$ s vektorom $\vec{c}$, tj.:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Kraće se ovo označuje s $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ i zove *trojka vektora.*

Geometrijski: Trojka vektora jednaka je po apsolutnom iznosu volumenu paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i s predznakom + ili − već prema tome čine li ti vektori (redom kako dolaze u vektorsko-skalarnom produktu) desni ili lijevi sustav:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = {}^{\pm}V.$$

b) Trojka ne mijenja vrijednost ako joj ciklički permutiramo faktore ili ako zamijenimo znakove »×« i »·« (uz pomak zagrade):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$$
$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}).$$

Ostale permutacije, koje nisu cikličke, svode se na permutaciju faktora u vektorskom produktu i mijenjaju predznak:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}.$$

Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni ako je:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$$

Zbog komplanarnosti je npr.:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

c) *Vektorsko-vektorski produkt* (ili eks-eks produkt) triju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jest vektorski produkt vektorskog produkta $\vec{a} \times \vec{b}$ s vektorom $\vec{c}$, tj.:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}.$$

Geometrijski: Ovo je vektor okomit na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ i na vektor $\vec{c}$, prema tome vektorsko-vektorski produkt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ je vektor koji leži u ravnini određenoj vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dakle: Vektorsko-vektorski produkt jest vektor koji je komplanaran s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

d) *Svojstva vektorsko-vektorskog produkta:*

Za vektorsko-vektorski produkt vrijedi:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Pravilo: Vektorsko-vektorski produkt triju vektora je razlika dvaju vektora (kolinearnih s vektorima u zagradi), od kojih je prvi produkt »srednjeg« vektora sa skalarnim produktom »krajnjih« vektora, a drugi vektor produkt »drugog« vektora iz zagrade sa skalarnim produktom preostala dva vektora.

Svojstva vektorsko-vektorskog produkta: Veoma je važan redoslijed vektora u vektorsko-vektorskom produktu. Ciklička permutacija dovodi do posve različitih vektora:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}),$$
$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}),$$
$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}(\vec{c}\cdot\vec{b})-\vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

Analogno i primjena mjesta zagrade u gornja tri produkta izaziva promjenu, jer ne vrijedi zakon asocijativnosti:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a})-\vec{a}(\vec{c}\cdot\vec{b}),$$
$$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=\vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{a})-\vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}),$$
$$(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}(\vec{c}\cdot\vec{b})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}),$$

pa je npr.:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Ovo znači da zakon asocijativnosti za vektorsko množenje ne vrijedi. Iz navedenog slijedi:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}.$$

Ova jednadžba zove se Jacobiev identitet.

Vektorsko-vektorski produkt možemo zapisati i pomoću determinante:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{b} & \vec{c}\\ (\vec{a}\cdot\vec{b}) & (\vec{a}\cdot\vec{c})\end{vmatrix}.$$

1.6. Višestruki produkti vektora. Gramova determinanta

a) *Skalarni produkt vektorskih produkata od po dva vektora.*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\ (\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})\ (\vec{b}\cdot\vec{c})=\begin{vmatrix}(\vec{a}\cdot\vec{c}) & (\vec{b}\cdot\vec{c})\\ (\vec{a}\cdot\vec{d}) & (\vec{b}\cdot\vec{d})\end{vmatrix}.$$

b) *Vektorski produkt vektorskih produkata od po dva vektora.*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d})-\vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}),$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d})-\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Vektori na desnoj strani ovih jednakosti su jednaki, jedino je u prvom slučaju rezultat vektor komplanaran s ravninom određenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rastav na »razliku« vektora $\vec{b}$ i $\vec{a}$ ili rastav »po $\vec{b}$ i $\vec{a}$«), a u drugom vektor komplanaran s ravninom određenom vektorima $\vec{c}$ i $\vec{d}$ (rastav na »razliku« vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$ ili rastav »po $\vec{c}$ i $\vec{d}$«). Odavde izlazi da je vektor $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$ paralelan s presječnicom ravnine vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i ravnine vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$.

Izrazi u zagradama su skalari – trojke vektora.

c) *Vektorski produkt vektora s vektorsko-vektorskim produktom triju vektora.*

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = (\vec{b} \cdot \vec{d})\,(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,(\vec{a} \times \vec{d}).$$

d) *Produkt od šest vektora* – produkt trojke vektora s trojkom vektora:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\,(\vec{p}, \vec{q}, \vec{s}) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{p}) & (\vec{a} \cdot \vec{q}) & (\vec{a} \cdot \vec{s}) \\ (\vec{b} \cdot \vec{p}) & (\vec{b} \cdot \vec{q}) & (\vec{b} \cdot \vec{s}) \\ (\vec{c} \cdot \vec{p}) & (\vec{c} \cdot \vec{q}) & (\vec{c} \cdot \vec{s}) \end{vmatrix}.$$

Dokaz jednakosti pod a), b), c) i d) vidi u zadacima 5, 6, 7. i 8. na str. 12. i 13.

e) *Gramova determinanta*

Gramovom determinantom $G(\vec{a}, \vec{b})$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zovemo determinantu:

$$G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{a}) & (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (\vec{b} \cdot \vec{a}) & (\vec{b} \cdot \vec{b}) \end{vmatrix}.$$

Za tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ Gramova se determinanta $G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ definira s:

$$G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \cdot \vec{a}) & (\vec{a} \cdot \vec{b}) & (\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ (\vec{b} \cdot \vec{a}) & (\vec{b} \cdot \vec{b}) & (\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ (\vec{c} \cdot \vec{a}) & (\vec{c} \cdot \vec{b}) & (\vec{c} \cdot \vec{c}) \end{vmatrix}.$$

Iz d) i e) proizlazi da je:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Svojstva Gramove determinante navedena su u zadacima od 21. do 28.

1.7. Vektori u pravokutnim (Descartesovim) koordinatama

a) *Skalarni produkt dvaju vektora.* Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dani svojim koordinatama $\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b}\,(b_x, b_y, b_z)$, skalarni produkt je dan s:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

jer vrijedi:

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1,$ $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ i vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, čine desni sustav vektora.

Posljedice:

Modul vektora: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$

Iz 1.4. a) proizlazi:

Kut između dvaju vektora:

$$\cos\phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Odavde proizlazi:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \text{tj. } a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \vec{a} \text{ i } \vec{b} \text{ su okomiti, ili } \vec{a}=\vec{0} \text{ ili } \vec{b}=\vec{0}.$$

b) *Vektorski produkt dvaju vektora.* Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dani koordinatama. $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, *tada je:*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

specijalno je:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}, \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},$$
$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}.$$

c) *Vektorsko-skalarni produkt triju vektora.*

Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dani koordinatama: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ i $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$, tada je:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Napomena: Kad vektor zadajemo koordinatama mislit ćemo pritom na pravokutne koordinate. Ako se radi o afinim (kosokutnim) koordinatama to ćemo posebno naglasiti.

Zadaci

1. Izračunati:

a) $(2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c})$,
b) $(2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c})\times(\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c})$.

a) $(2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c})=$
$=2\vec{a}^2+3\vec{b}\cdot\vec{a}-5\vec{c}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}^2+10\vec{c}\cdot\vec{b}-8\vec{a}\cdot\vec{c}-12\vec{b}\cdot\vec{c}+20\vec{c}^2=$
$=2\vec{a}^2-6\vec{b}^2+20\vec{c}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-13\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}.$

b) $(2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c})\times(\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c})=$
$=2\vec{a}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{a}-5\vec{c}\times\vec{c}-4\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{b}\times\vec{b}+10\vec{c}\times\vec{b}-8\vec{a}\times\vec{c}-$
$-12\vec{b}\times\vec{c}+20\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}-3\vec{a}\times\vec{b}+5\vec{a}\times\vec{c}-4\vec{a}\times\vec{b}-\vec{0}-10\vec{b}\times\vec{c}-$
$-8\vec{a}\times\vec{c}-12\vec{b}\times\vec{c}+\vec{0}=-7\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{a}\times\vec{c}-22\vec{b}\times\vec{c}=7\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{c}\times\vec{a}+$
$+22\vec{c}\times\vec{b}.$

2. Dokaži da vrijedi:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

Prema definiciji skalarnog i vektorskog produkta jeste:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\phi)^2 + (|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\phi)^2 =$$
$$= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\phi + |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\phi = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2.$$

Prema tome je:

$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = \vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$, odakle proizlazi tvrdnja.

3. Ako su zadana u afinim koordinatama dvaju vektora:

$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3$ i $\vec{b} = b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + b^3\vec{e}_3$,

izračunati njihov a) skalarni produkt, b) vektorski produkt.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a^1 b^1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + a^2 b^2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + a^3 b^3\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 +$
$+ (a^1 b^2 + a^2 b^1)\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + (a^2 b^3 + a^3 b^2)\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 +$
$+ (a^3 b^1 + a^1 b^3)\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1.$

b) $\vec{a}\times\vec{b} = a^1 b^1\vec{e}_1\times\vec{e}_1 + a^2 b^2\vec{e}_2\times\vec{e}_2 + a^3 b^3\vec{e}_3\times\vec{e}_3 +$
$+ a^1 b^2\vec{e}_1\times\vec{e}_2 + a^1 b^3\vec{e}_1\times\vec{e}_3 + a^2 b^1\vec{e}_2\times\vec{e}_1 +$
$+ a^2 b^3\vec{e}_2\times\vec{e}_3 + a^3 b^1\vec{e}_3\times\vec{e}_1 + a^3 b^2\vec{e}_3\times\vec{e}_2 =$
$= (a^1 b^2 - a^2 b^1)\vec{e}_1\times\vec{e}_2 + (a^1 b^3 - a^3 b^1)\vec{e}_1\times\vec{e}_3 +$
$+ (a^2 b^3 - a^3 b^2)\vec{e}_2\times\vec{e}_3,$

jer je $\vec{e}_1\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3\times\vec{e}_3 = \vec{0}$.

4. Dokaži da je:

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\;(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})\;(\vec{b}\cdot\vec{c}).$

(Vidi 1.6.a.)

Označimo li $\vec{c}\times\vec{d}$ sa $\vec{s}$ bit će prema 1.5.b:

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{s} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{s}) = \vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})] =$
$= \vec{a}\cdot[(\vec{b}\cdot\vec{d}) - \vec{d}(\vec{b}\cdot\vec{c})] = (\vec{a}\cdot\vec{c})\;(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})\;(\vec{b}\cdot\vec{c}).$

Slično bismo dobili ako bismo označili $\vec{a}\times\vec{b}$ sa $\vec{r}$:

$(\vec{r}\times\vec{b})\;(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{r}\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{r}\times\vec{c})\cdot\vec{d} =$
$= [(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}]\cdot\vec{d} = [\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})]\cdot\vec{d} =$
$= (\vec{b}\cdot\vec{d})\;(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})\;(\vec{b}\cdot\vec{c}).$

5. Dokaži da je:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d} = \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}) =$$
$$= \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

(Vidi 1.6.b.)

Postupit ćemo slično kao i u prethodnom zadatku i označiti najprije $\vec{c}\times\vec{d}$ sa $\vec{s}$:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{s} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{s}) -$$
$$- \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{s}) = \vec{b}[\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})] - \vec{a}[\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})] =$$
$$= \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}).$$

Zatim ćemo $\vec{a}\times\vec{b}$ označiti s $\vec{r}$:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{d})=$$
$$=\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{d})-\vec{d}(\vec{r}\cdot\vec{c})=\vec{c}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}]-$$
$$-\vec{d}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]=\vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d})-\vec{b}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

6. Dokaži da je:

$$\vec{a}\times[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]=(\vec{b}\cdot\vec{d})\ (\vec{a}\times\vec{c})-(\vec{b}\times\vec{c})\ (\vec{a}\times\vec{d}).$$

(Vidi 1.6.c.)

$$\vec{a}\times[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]=\vec{a}\times[\vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{d})-\vec{d}(\vec{b}\cdot\vec{c})]=$$
$$=(\vec{a}\times\vec{c})\ (\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\times\vec{d})\ (\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

7. Dokaži da je:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\ (\vec{p},\vec{q},\vec{s})=\begin{vmatrix}(\vec{a}\cdot\vec{p}) & (\vec{a}\cdot\vec{q}) & (\vec{a}\cdot\vec{s})\\ (\vec{b}\cdot\vec{p}) & (\vec{b}\cdot\vec{q}) & (\vec{b}\cdot\vec{s})\\ (\vec{c}\cdot\vec{p}) & (\vec{c}\cdot\vec{q}) & (\vec{c}\cdot\vec{s})\end{vmatrix}.$$

(Vidi 1.6.d.)

Zadajmo vektore $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{p},\vec{q}$ i $\vec{s}$ pomoću koordinata: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$, $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$, $\vec{q}(q_x, q_y, q_z)$, i $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$. Tada imamo:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\ (\vec{p},\vec{q},\vec{s})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}p_x & p_y & p_z\\ q_x & q_y & q_z\\ s_x & s_y & s_z\end{vmatrix}.$$

Pomnožimo li dvije determinante na desnoj strani po pravilu »redak s retkom« dobit ćemo traženu tvrdnju.

8. Ako su zadani vektori $\vec{a}(5,3,-4)$, $\vec{b}(3,-1,5)$ i $\vec{c}(2,3,-3)$ treba izračunati:

a) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, b) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$,

c) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$, d) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})$.

a) Računajmo na dva načina: Po definiciji u 1.7.b i kraće po formuli u 1.5.c.
Imamo po formuli u 1.7.b:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(5\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})\times\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=(5\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})\times(-12\vec{i}+19\vec{j}+11\vec{k})=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 3 & -4\\ -12 & 19 & 11\end{vmatrix}=109\,\vec{i}-7\,\vec{j}+131\,\vec{k}.$$

Kraće računamo po formuli: (Vidi 1.5.d.)

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Računajmo skalarne produkte u zagradama po formuli u 1.7.a:

$$(\vec{a}\cdot\vec{c}) = 10 + 9 + 12 = 31 \quad \text{i} \quad (\vec{a}\cdot\vec{b}) = 15 - 3 - 20 = -8.$$

Tada je:

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= 31\,(3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) + 8\,(2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}) = \\ &= 93\vec{i} - 31\vec{j} + 155\vec{k} + 16\vec{i} + 24\vec{j} - 24\vec{k} = \\ &= 109\vec{i} - 7\vec{j} + 131\vec{k}.\end{aligned}$$

b) Računat ćemo od sada kraće prema formuli u 1.5.d.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

Tada je $(\vec{a}\cdot\vec{c}) = 31$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = -12$,
pa je:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} &= 31\,(3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) + 12\,(5\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) = \\ &= 93\vec{i} - 31\vec{j} + 155\vec{k} + 60\vec{i} + 36\vec{j} - 48\vec{k} = \\ &= 153\vec{i} + 5\vec{j} + 107\vec{k}.\end{aligned}$$

Odavde se vidi svojstvo iz 1.5.d:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}).$$

c) Prema 1.6.a imamo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & (\vec{b}\cdot\vec{a}) \\ (\vec{a}\cdot\vec{c}) & (\vec{b}\cdot\vec{c}) \end{vmatrix} = \vec{a}^2(\vec{b}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{a}) =$$

$$= 50\cdot(-12) - 31\cdot(-8) = -600 + 248 = -352.$$

d) Prema 1.6.b imamo ako rastavimo »po $\vec{a}$ i $\vec{c}$«.

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) &= \vec{a}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}] - \vec{c}[(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}] = \\ &= \vec{a}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) - \vec{0} = \vec{a}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}),\end{aligned}$$

ili ako rastavimo »po $\vec{b}$ i $\vec{a}$«:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) &= \vec{b}[\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})] - \vec{a}[\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})] = \\ &= \vec{0} - \vec{a}[(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}] = \vec{a}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}] = \vec{a}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).\end{aligned}$$

Tada je prema 1.7.c:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 15 + 30 - 36 - 8 - 75 + 27 = -47.$$

Na kraju je:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) &= -47\,(5\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}) = \\ &= -235\,\vec{i} - 141\,\vec{j} + 188\,\vec{k}.\end{aligned}$$

9. Ako su zadani vektori: $\vec{a}(1,2,-3)$, $\vec{b}(2,-1,-2)$, $\vec{c}(-4,3,-1)$ i $\vec{d}(5,-4,4)$, treba izračunati:

a) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$, b) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$,

c) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$, d) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{a})$.

a) Po 1.6.a imamo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} (\vec{a}\cdot\vec{c}) & (\vec{a}\cdot\vec{d}) \\ (\vec{b}\cdot\vec{c}) & (\vec{b}\cdot\vec{d}) \end{vmatrix}.$$

Jer je:

$$(\vec{a}\cdot\vec{c}) = -4+6+3=5, \qquad (\vec{a}\cdot\vec{d}) = 5-8-12=-15,$$
$$(\vec{b}\cdot\vec{c}) = -8-3+2=-9, \qquad (\vec{b}\cdot\vec{d}) = 10+4-8=6,$$

imamo na kraju:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = -105.$$

b) Po 1.6.b imamo (ili po zad. 5):

$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{c}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}] - \vec{d}[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]$, (rastav »po $\vec{c}$ i $\vec{d}$«)

ili $= \vec{b}[\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})] - \vec{a}[\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})]$, (rastav »po $\vec{b}$ i $\vec{a}$«)

Na prvi način rastavljeno »po $\vec{b}$ i $\vec{a}$« imamo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}).$$

Kako je:

$$(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 27,$$

$$(\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 3, \text{ to je:}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= 27\vec{b} - 3\vec{a} = \\ &= 27(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}) - 3(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) = \\ &= 51\vec{i} - 33\vec{j} - 45\vec{k}.\end{aligned}$$

Na drugi način rastavljeno »po $\vec{c}$ i $\vec{d}$« imamo:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Dalje je:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -39,$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 21.$$

Tada je:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= -39\vec{c} - 21\vec{d} = \\ &= -39(-4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) - 21(5\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}) = \\ &= 51\vec{i} - 33\vec{j} - 45\vec{k}.\end{aligned}$$

c) Prema rezultatu prethodnog zadatka imamo:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,(\vec{b} \cdot \vec{a}) - \vec{a}^2(\vec{b} \cdot \vec{c}) =$$
$$= 5 \cdot 6 - 14 \cdot (-9) = 156.$$

d) Prema rezultatu prethodnog zadatka imamo:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{a}) = -(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{a}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$$
$$= -21(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) = -21\vec{i} - 42\vec{j} + 63\vec{k}.$$

10. Zadani su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, koji nisu komplanarni i vektor $\vec{d}$. Predoči vektor $\vec{d}$ kao linearnu kombinaciju tih triju vektora.

Kako je:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}),\end{aligned}$$

to je:

$$\vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}).$$

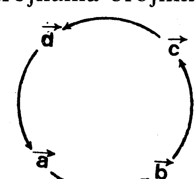
Tada je:

$$\vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) - \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}).$$

Kako vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nisu komplanarni, to je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$, pa imamo na kraju:

$$\vec{d} = \frac{(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}\vec{a} - \frac{(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}\vec{b} + \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}\vec{c}.$$

Ovo možemo zgodnije pisati ako uočimo da su članovi u trojkama brojnika desne strane ciklički permutirani po shemi (sl. 10):



Sl. 10.